УДК 539.3

И. И. Сафаров, З. И. Болтаев

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛАСТИНКЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Аннотация. Построена сопряженная спектральная задача при условиях биортогональности для вязкоупругой пластинки с переменной толщиной. Сформулирована спектральная задача, описывающая распространение изгибных плоских волн в волноводе. Численные решения спектральных задач проводились на ЭВМ программным комплексом, основанным на методе ортогональной прогонки С. К. Годунова в сочетании с методом Мюллера.

Ключевые слова: пластинка, спектральная задача, переменная толщина, изгибные плоские волны, вязкоупругая пластинка, волновод, возможные перемещения.

Abstract. The authors have constructed an interfaced spectral problem under conditions of bi - orthogonality for a viscoelastic plate with variable thickness. The spectral problem describing distribution of flexural flat waves in a wave guide has been also formulated. Numerical solutions of spectral problems have been calculated on computer by the program complex based on the method of orthogonal condensation by S. K. Godunov combined with the Müller’s method.

Key words: plate, spectral problem, variable thickness, flexural flat waves, viscoelastic plate, wave guide, possible movings.

Математическая постановка задачи и построение условия биортогональности

Рассмотрим вязкоупругий волновод в виде бесконечной вдоль оси X_1 пластинки переменной толщины. Основные соотношения классической теорий пластин переменной толщины можно получить на основе принципа возможных перемещений [1]. Вариационное уравнение задачи теории вязкоупругости в трехмерной постановке имеет вид

$$\iiint\limits_{\nu}(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}+\rho u_i\delta u_i)dx_3dx_2dx_1=0 \ \ (i=1,2,3;\ j=1,2,3), \tag{1}$$

где ρ – плотность материала; u_i – компоненты перемещений; σ_{ij} и ε_{ij} – компоненты тензора напряжений и деформаций; V – объем, занимаемый телом.

В соответствии с гипотезами Кирхгоффа – Лява [2]

$$\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=0;\ u_i=-x_3\frac{\partial W}{\partial x_i};\ W(x_3)=w, \tag{2}$$

где W – прогиб срединной плоскости полосы.

Пренебрегая в (1) членами, учитывающими инерцию вращения нормали к срединной плоскости, будет иметь следующее вариационное равенство:

$$\int\limits_S ds\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}+2\tau_{12}\delta\varepsilon_{12}+\delta_{22}\delta\varepsilon_{22})dx_3+\int\limits_S ds\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dx_3=0. \tag{3}$$

Исходя из геометрических соотношений и соотношений обобщенного закона Гука, с учетом кинематических гипотез (2) выражения для компонент тензоров деформаций и напряжений принимают вид

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j},\ i,j=1,2;$$

$$\sigma_{11}=\frac{\tilde{E}}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22});\ \sigma_{22}=\frac{\tilde{E}}{1-\nu}(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11});$$

$$\sigma_{12}=\frac{\bar{E}}{1+\nu}\varepsilon_{12},\ \tilde{E}\varphi(t)=E_{01}\left[\varphi(t)-\int\limits_{-\infty}^{t}R_E(t-\tau)\varphi(t)\,d\tau\right], \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ – произвольная функция времени; $R_E(t-\tau)$ – ядро релаксации; E_{01} – мгновенный модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона, предполагается, что постоянная величина.

Введем обозначения для моментов:

$$M_{11}=D_1\bar{E}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right);\ M_{22}=D_1\bar{E}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right);$$

$$M_{12}=D_1\bar{E}(1-v)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}, \tag{5}$$

где $D_1=h^3/\left(12\left(1-v^2\right)\right)$.

Интегрируя (3) по толщине полосы, придем к следующему равенству:

$$\int\limits_S\left(M_{11}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x_1^2}+2M_{12}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x_1\partial x_2}+M_{22}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x_2^2}\right)ds-\int\limits_S\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w ds=0\,. \tag{6}$$

Интегрируя дважды по частям и приравнивая нулю коэффициенты (6) при вариациях δw внутри тела (и на его границе), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2}+\rho h\ddot{w}=0\ \left(\ddot{w}=\partial^2 w/\partial t^2\right) \tag{7}$$

с естественными граничными условиями:

$$\frac{\partial w}{\partial x_2}=0;\quad w=0;\ x_2=0;\ l_2;\ \frac{\partial w}{\partial x_1}=0;\ w=0:\ x_1=0;\ l_1, \tag{8}$$

и главными альтернативными к ним условиями:

$$M_{22}=0;\ \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}+2\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}=0;\ x_2=0;\ l_2; \tag{9}$$

$$M_{11}=0;\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+2\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}=0\,;\ x_1=0;\ l_1\,.$$

Для построения спектральной задачи введем следующие замены переменных:

$$w=w\,;\ \varphi=\frac{\partial w}{\partial x_2};\ \ M=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right);\ Q=\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (7), получим систему интегродифференциальных уравнений в частных производных, разрешенную относительно первых производных по x_2:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2}+D_1E_{01}(1-\nu)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-\int\limits_{-\infty}^{t}R_D\left(t-\tau\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(\tau)\,d\tau\right]+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\,;$$

$$\frac{\partial M}{\partial x_2}-Q-D_1'(1-\nu)E_{01}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\int\limits_{-\infty}^{t}R_D\left(t-\tau\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}d\tau\right]=0\,;$$

$$M-D_1E_{01}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)-\int\limits_{-\infty}^{t}R_D\left(t-\tau\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)d\tau\right]=0\,; \tag{11}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2}-\varphi=0\,,$$

и альтернативные граничные условия на $x_2=0$: $x_2=l_2$:

$$\varphi=0\ \text{ или }\ M-D_1\left(1-\nu\right)E_{01}\left[\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2}-\int\limits_{-\infty}^{t}R_D\left(t-\tau\right)\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2}d\tau\right]=0; \tag{12}$$

$$w=0\ \text{ или }\ Q+D_1\left(1-\nu\right)E_{01}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-\int\limits_{-\infty}^{t}R_D\left(t-\tau\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}d\tau\right]=0$$

и на $x_1=0,\ x_1=l_1,\ \varphi=0$ или

$$M-D_1\left(1-\nu\right)E_{01}\left[\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2}-\int\limits_{-\infty}^{t}R_D\left(t-\tau\right)\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2}d\tau\right]=0\,, \tag{13}$$

$w=0$ или

$$Q+D_1\left(1-\nu\right)E_{01}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-\int\limits_{-\infty}^{t}R_D\left(t-\tau\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}d\tau\right]=0\,,\ D_1'=3h^2/\left(12/\left(1-\nu^2\right)\right).$$

Теперь рассмотрим бесконечную вдоль оси x_1 полосу с произвольным законом изменения толщины $h=h(x_2)$. Будем искать решение задачи (11)–(13),

$$\left(Q, M, \varphi, w\right)^T = \left(\bar{Q}, \bar{M}, \bar{\varphi}, \bar{W}\right)^T e^{i\left(kx_1 - \omega t\right)}, \tag{14}$$

описывающее гармонические плоские волны, распространяющиеся вдоль оси x_1. Здесь $\omega = \omega_R + i\omega_I$ – комплексная собственная частота; k – волновое число; ω_R – действительная часть комплексной частоты; ρ – плотность. Для выяснения их физического смысла рассматриваем случаи:

1) $k = \alpha_R$; $C = C_R + iC_I$. Тогда решение (14) имеет вид синусоиды по z, амплитуда которой затухает по времени;

2) $k = \alpha_R + i\alpha_I$; $C = C_R$. Тогда в каждой точке z колебания установившиеся, а по α_1 затухают.

Подставляя (14) в (11), получим дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производных

$$\bar{Q}' - \alpha^2 \bar{M} - \alpha^2 D_1 E_1 \left(1-\nu\right)\bar{\varphi} - \rho h \omega^2 \bar{W} = 0;\ \bar{M}' - \bar{Q} + \alpha^2 D_1' E_1 \left(1-\nu\right)\bar{W} = 0;$$

$$\bar{\varphi}' - \frac{1}{D_1 E_1}\bar{M} - \alpha^2 \bar{W} = 0;\ \bar{W}' - \bar{\varphi} = 0 \tag{15}$$

с граничными условиями на торцах полосы $x_2 = 0,\ l_2$, одного из четырех типов:

а) шарнирное опирание: $\bar{W} = \bar{M} = 0$;

б) скользящий зажим: $\bar{Q} = \bar{\varphi} = 0$;

в) жесткая заделка: $\bar{W} = \bar{\varphi} = 0$; (16)

г) свободный край:

$$\bar{M} + \alpha^2 D_1 E_1 (1-\nu) + \alpha^2 D_1 E_1 (1-\nu)\bar{W} = 0;\ \bar{M}' - \alpha^2 (1-\nu) D_1 E_1 \bar{\varphi} = 0,$$

где $E_1 = E_{01}\left[1 - \Gamma^C\left(\omega_R\right) - i\Gamma^S\left(\omega_R\right)\right]$; $\Gamma^C\left(\omega_R\right)$ и $\Gamma^S\left(\omega_R\right)$ – синус и косинус преобразования Фурье.

Таким образом, сформулирована спектральная задача (15) и (16) по параметру α^2, описывающая распространение изгибных плоских волн в волноводе, выполненном в виде полосы с произвольным законом изменения толщины по координате x_2.

Покажем, что в случае $R_E = 0$ спектральный параметр α^2 принимает только действительные значения.

Пусть $\bar{M}$ и $\bar{W}$ – некоторые собственные функции системы (15), (16), которые могут принимать как действительные, так и комплексные значения. Умножим систему уравнений (15) на $\hat{M}$ и $\hat{W}$ – комплексно сопряженные к $\bar{M}$ и $\bar{W}$ функции. Тождественно преобразовав первое уравнение, проинтегрируем полученные равенства по x_2 и составим следующую линейную комбинацию:

$$\int_0^{l_2} \bar{M}'' W dx_2 - \alpha^2 (1-\nu) E_1 \int_0^{l_2} (D_1 \bar{W})'' W dx_2 + \alpha^2 (1-\nu) \int_0^{l_2} E_1 (D_1 \bar{W})'' W dx_2 -$$

$$-\alpha^2\int \bar{M}Wdx_2 - \omega^2\int_0^{l_2}\rho h\bar{W}Wdx_2 - \alpha^2(1-\nu)\int_0^{l_2}E_1D''\bar{W}Wdx_2 +$$

$$+\int_0^{l_2}\bar{W}''Mdx_2 - \alpha^2\int_0^{l_2}\bar{W}Mdx_2 - \int_0^{l_2}\frac{\bar{M}M}{D_1E_1}dx_2 = 0. \qquad (17)$$

Интегрируя (17) по частям, получим

$$\left[\bar{M}' - \alpha^2(1-\nu)E_1\left(D_1\bar{W}\right)'\right]W\Big|_0^{l_2} + \left[M + \alpha^2(1-\nu)E_1D_1W\right]\bar{W}'\Big|_0^{l_2} -$$

$$-\int_0^{l_2}\left(\bar{M}'W + M\bar{W}'\right)dx_2 - \alpha^2\int_0^{l_2}\left(\bar{W}M + W\bar{M}\right)dx_2 - \int_0^{l_2}\frac{\bar{M}M}{D_1E_1}dx_2 -$$

$$-\omega^2\int_0^{l_2}\rho h\bar{W}Wdx_2 - 2\alpha^2(1-\nu)\int_0^{l_2}E_1D_1''W\bar{W}dx_2 + \alpha^2(1-\nu)\int_0^{l_2}E_1D_1'\left(W\bar{W}\right)'dx_2 = 0. \qquad (18)$$

Легко убедиться, что внеинтегральные члены равенства (18) обращаются в нуль при любой комбинации граничных условий (16). В общем случае

$$\alpha^2 = \frac{\int_0^{l_2}(\bar{M}'W' + M'\bar{W}')dx_2 + \int_0^{l_2}\frac{\bar{M}M}{D_1E_1}dx_2 + \omega^2\int_0^{l_2}\rho h\bar{W}Wdx_2}{\int_0^{l_2}(\bar{M}W + M\bar{W})dx_2 - 2(1-\nu)\int_0^{l_2}E_1D_1''\bar{W}Wdx_2 - (1-\nu)\int_0^{l_2}E_1D_1'(\bar{W}W)'dx_2} \qquad (19)$$

– комплексное число.

Таким образом, показано при $R_E = 0$ в случае упругой пластинки, что квадрат собственного волнового числа для бесконечной полосы переменной толщины действителен при любой комбинации граничных условий (16). Если учитывается реологические свойства материала пластинки, то α становится комплексным.

Сопряженная спектральная задача и условие биортогональности

Полученная спектральная задача (15), (16) не является самосопряженной. Построим для нее сопряженную задачу, воспользовавшись для этого формулой Лагранжа [3]:

$$\int_0^l L(u)\cdot v^*dx = Z(u,v^*)\Big|_0^l - \int_0^l L^*(v^*)\cdot udx, \qquad (20)$$

где $L = L_R + iL_I$ и L^* – прямой и сопряженный линейные дифференциальные операторы; u и v^* – произвольные решения соответствующих краевых задач. В нашем случае

$$L=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_2} & -\Omega_R^2 & -\Omega_R^2 E_1 D_1'(1-\nu) & -\rho h\omega^2 \\ -1 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & 0 & -\Omega_R^2 E_1 D_1'(1-\nu) \\ 0 & \dfrac{1}{D} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & -\Omega_R^2 \\ 0 & 0 & -1 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$L_I=\begin{pmatrix} 0 & -\Omega_1 & -\Omega_1 E_1 D_1'(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_1 E_1 D_1'(1-\nu) \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_{2R} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Левая часть равенства (20) будет иметь следующий вид:

$$\left[\bar{Q}\bar{Q}^* + \bar{M}'\bar{M}^* + \bar{\varphi}\bar{\varphi}^* + \bar{W}'\bar{W}^*\right]\Big|_0^{l_2} - \int_0^{l_2}\Big[(\bar{Q}^{*\prime} + \bar{M}^*)\bar{0} + (\bar{M}^{*\prime} + \alpha^2\bar{Q}^* +$$

$$+\frac{1}{D_1E_1}\bar{\varphi}^*)\bar{M} + (\bar{\varphi}^{*\prime} + \bar{W}^* + \alpha^2 E_1 D_1'(1-\nu)\bar{0}^*)\bar{\varphi} + (\bar{W}^{*\prime} + \alpha^2\varphi^* -$$

$$-\alpha^2 E_1 D_1'(1-\nu) M^* + \rho h\omega^2\bar{Q}^*)\bar{W}\Big] dx_2 = 0, \qquad (22)$$

где $\Omega_R^2 = \alpha_I^2 - \alpha_R^2$; $\Omega_{3R} = 2\alpha_R\alpha_I$.

Таким образом, сопряженная к (15) система имеет вид

$$\bar{Q}^{*\prime} + \bar{M}^* = 0,$$

$$\bar{M}^{*\prime} + \alpha^2 Q^* + \frac{1}{E_1 D_1}\bar{\varphi}^* = 0,$$

$$\bar{\varphi}^{*\prime} + \bar{W}^* + \alpha^2 E_1 D_1'(1-\nu)\bar{Q}^* = 0,$$

$$\bar{W}^{*\prime} - \alpha^2 E_1 D_1'(1-\nu)\bar{M}^* + \alpha^2\bar{\varphi}^* + \rho h\omega^2\bar{Q}^* = 0. \qquad (23)$$

Кроме того, получаем сопряженные граничные условия из равенства нулю внеинтегральных членов $Z(U,V^*)\Big|_0^{l_2}$ в выражении (22):

а) шарнирное опирание: $\bar{\varphi}^* = \bar{Q}^* = 0, \quad x_2 = 0, \ l_2$;

б) скользящий зажим: $\bar{W}^* = \bar{M}^* = 0, \quad x_2 = 0, \ l_2$; (24)

в) жесткая заделка: $\bar{M}^* = \bar{Q}^* = 0, \quad x_2 = 0, \ l_2$;

г) свободный край:

$$\bar{\varphi}^* + \alpha^2 E_1 D_1 (1-\nu)\bar{\theta}^* = 0,\ \bar{W}^* - \alpha^2 E_1 D_1' (1-\nu)\bar{M}^* = 0, \quad x_2 = 0, \quad l_2 .$$

Для получения условия биортогональности решения воспользуемся еще раз формулой Лагранжа (20) в виде

$$\int_0^l L\left[(U)V^* + L^*(V^*)U\right]dx = Z(U,V^*)\Big|_0^{l_2},$$

которая приводит к рассмотрению следующего интеграла:

$$\int_0^{l_2}\Big[\bar{Q}_i\bar{Q}_j^* - \alpha_i^2 \bar{M}_i \bar{Q}_j^* - \alpha_i^2 E_1 D_1'(1-\nu)\bar{\varphi}_i \bar{Q}_j^* - \rho h \omega^2 \bar{W}_i \bar{Q}^*{}_j + \bar{M}_i \bar{M}^*{}_j -$$

$$-\bar{Q}_i \bar{M}^*{}_j + \alpha^2{}_i E_1 D_1'(1-\nu)\bar{W}_i \bar{M}^*{}_j + \bar{\varphi}_i' \bar{\varphi}^*{}_j - \frac{1}{E_1 D_1}\bar{M}_i \bar{\varphi}^*{}_j - \alpha^2{}_i \bar{W}_i \bar{\varphi}^*{}_j +$$

$$+\bar{W}_i' \bar{W}^*{}_j - \bar{\varphi}_i \bar{W}^*{}_j + \bar{Q}_j^{*\prime\prime} \bar{Q}_{ij} + \bar{M}^*{}_j \bar{Q}_i + \bar{M}_j{}^* \bar{M}_i + \alpha^2{}_j \bar{M}_i \bar{Q}^*{}_j +$$

$$+\frac{1}{D_1 E_1}\bar{M}_i \bar{\varphi}^*{}_j + \bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_j{}^{*\prime} + \bar{W}^*{}_j \bar{\varphi}_i + \alpha^2{}_j E_1 D_1'(1-\nu)\bar{Q}^*{}_j \bar{\varphi}_i + \bar{W}_i \bar{W}_j{}^{*\prime} +$$

$$+\alpha_j^2 \bar{W}_i \bar{\varphi}_j^* - \alpha_j^2 E_1 D'_1 (1-\upsilon)\bar{W}_i \bar{M}_j^* + \rho h \omega^2 \bar{Q}_j^* \bar{W}_i\Big]dx_2 = 0, \qquad (25)$$

где $(\bar{Q}_i, \bar{M}_i, \bar{\varphi}_i, \bar{W}_i)^T$ – собственная форма, соответствующая собственному значению α_i исходной спектральной задачи; $(\bar{Q}_i^*, \bar{M}_i^*, \bar{\varphi}_i^*, \bar{W}_i^*)^T$ – собственная форма, соответствующая собственному значению α_j сопряженной спектральной задачи.

Интегрируя (25) по частям, получим

$$\left(\alpha_i^2 - \alpha_j^2\right)\left[\int_0^{l_2}\left[-\bar{M}_i \bar{Q}^*{}_j - E_1 D_1'(1-\nu)\bar{Q}^*{}_j \bar{\varphi}_i + E_1 D_1'(1-\nu)\bar{W}_i \bar{M}^*{}_j - \bar{W}_i \varphi^*{}_j\right]dx_2 + \right.$$

$$\left. + \left[E_1 D_1 (1-\nu)\bar{Q}^*{}_j \bar{\varphi}_i - E_1 D_1 (1-\nu)\bar{W}_i \bar{M}_j{}^*\right]\right] = 0,$$

откуда для $i \neq j$ имеем условие биортогональности форм:

$$\int_0^{l_2}\left[\bar{M}_i + E_1 D_1'(1-\nu)\bar{\varphi}_i)\bar{Q}^*{}_j + \bar{W}_i(\bar{\varphi}^*{}_j - E_1 D_1'(1-\nu)\bar{M}^*{}_j)\right]dx_2 +$$

$$+E_1 D_1 (1-\nu)\left[\bar{W}_i \bar{M}^*{}_j - \bar{Q}^*{}_j \bar{\varphi}_i\right]\Big|_0^{l_2} = \delta_{ij} . \qquad (26)$$

При этом выражение $\bar{W}_i \bar{M}^*{}_j - \bar{Q}^*{}_j \bar{\varphi}_i$ обращается в нуль, если на границе задано любое из условий (24), кроме условия свободного края.

В качестве примера рассмотрим стационарную задачу для полубесконечной полосы переменной толщины. Рассмотрим полубесконечную вдоль оси x_1 полосу переменного сечения, на торце которой ($x_1 = 0$) заданы гармонические по времени воздействия одного из двух типов:

$$W = f_W(x_2)e^{i\omega t},\ M_{11} = f_W(x_2)e^{i\omega t},\ x_1 = 0, \tag{27,а}$$

или

$$\varphi_1 = f_\varphi(\mathrm{x}_2)\mathrm{e}^{i\omega t},\quad Q_1 = f_Q(x_2)e^{i\omega t},\ \ x_1 = 0, \tag{27,б}$$

где

$$\varphi_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1},\quad Q_1 = E_1 D_1\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x_1^3} + 2(1-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right].$$

Преобразуем граничные условия (27,а) так, чтобы в них содержались только выбранные нами переменные W, φ, M и Q

$$W = f_\omega(x_2)e^{i\omega t},\ \ E_1 D_1\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2{}_1} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2{}_2}\right) = f_M(x_2)e^{i\omega t},\ x_1 = 0, \tag{28,а}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = f_\phi(x_2)e^{i\omega t},\ \ E_1 D_1\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3{}_1} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x_1 \partial x^2{}_2}\right) = f_Q(x_2)e^{i\omega t},\ \ x_1 = 0. \tag{28,б}$$

Предположим, что искомое решение стационарной задачи можно разложить в ряд по собственным функциям решения спектральной задачи. В случае постоянной толщины это очевидно, а в общем случае вопрос остается открытым.

Решение стационарной задачи (11)–(13) будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} W \\ \varphi \\ M \\ Q \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} a_k \begin{pmatrix} \bar{W}_k(x_2) \\ \bar{\varphi}_k(x_2) \\ \bar{M}_k(x_2) \\ \bar{Q}_k(x_2) \end{pmatrix} e^{-i(\alpha_R x_1 - \omega t)}, \tag{29}$$

где $\bar{W}_k$, $\bar{\varphi}_k$, $\bar{Q}_k$, $\bar{M}_k$ – биортонормированные собственные формы спектральной задачи (15)–(16).

Представление (29) дает нам решение стационарной задачи в дальнем волновом поле, т.е. там, где уже затухли нераспространяющиеся моды.

Рассмотрим два случая возбуждения стационарных волн в полосе:

а) $f_\omega = 0$ – антисимметричное относительно x_1;

б) $f_\varphi = 0$ – симметричное.

В случае антисимметричного возбуждения подставляя (29) в (28,а) и выражая $f(x_2)$, получим

$$f_M(x_2) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \bar{M}_k(x_2). \tag{30}$$

Соотношение биортогональности (26) дает выражение для определения неизвестных коэффициентов

$$a_k = \int_0^{e_2} f_M(x_2) Q_k(x_2) dx_2 .$$

Рассмотрим полубесконечную пластину постоянной толщины, удовлетворяющую гипотезам Кирхгоффа – Лява, с опертыми длинными краями ($x_2 = 0$). На торце $x_1 = 0$ заданы:

$$W = f_1(x_2) e^{i\omega t}, \quad M_{11} = f_2(x_2) e^{i\omega t}. \tag{31}$$

Распространение вдоль оси x_1 изгибной волны описывается системой дифференциальных уравнений

$$Q' + \frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \rho h W'' = 0, \ M' - Q = 0,$$

$$\varphi' - \frac{1}{E_1 D_1} M + \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} = 0, \ W' - \varphi = 0, \quad h = h_0 ,$$

с граничными условиями вида

$$W = 0 , \ M - E_1 D_1 (1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2{}_1} = 0, \quad x_2 = 0, \ \pi \ \left(W'' = \partial^2 w / \partial t^2 \right).$$

Вводя искомый вектор движения в виде

$$\begin{pmatrix} Q \\ M \\ \varphi \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \bar{M} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{W} \end{pmatrix} e^{-i(a_k x_1 - \omega t)} ,$$

переходим к спектральной задаче

$$\bar{Q}' - \alpha^2 \bar{M} - \omega^2 \rho h \bar{W} = 0, \quad \bar{M} - \bar{Q} = 0,$$

$$\bar{\varphi}' - \frac{1}{D_1 E_1} \bar{M} - \alpha^2 \bar{W} = 0, \quad \bar{W}' - \bar{\varphi} = 0, \tag{32}$$

с граничными условиями

$$W = 0, \ \bar{M} + D_1 E_1 (1-\nu) \alpha^2 \bar{W} = 0, \ x_2 = 0, e ,$$

или

$$\bar{W} = 0, \ \bar{M} = 0, \ x_2 = 0, e . \tag{33}$$

Перепишем систему (32) в следующем виде:

$$\bar{W}'' - \frac{1}{D_1 E_1} \bar{M} - a^2 \bar{W} = 0, \quad \bar{M}'' - \alpha^2 \bar{M} - \omega^2 \rho h \bar{W} = 0, \tag{34}$$

и

$$\bar{W} = 0,\ \bar{M} = 0,\ x_2 = 0,\quad \pi.$$

Будем искать решение задачи (34) в виде

$$W = a_\omega \sin n x_2,\quad M = a_M \sin n x_2,\ n = 1,2,\ldots,$$

удовлетворяющем граничным условиям (33).

Получим алгебраическую однородную систему:

$$-n^2\alpha_W - \alpha^2\alpha_W - \frac{1}{E_1 D_1}\alpha_M = 0;$$

$$-n^2\alpha_M - \alpha^2\alpha_M - \omega^2 ph\alpha_M = 0.$$

Для существования нетривиального решения системы необходимо потребовать равенство нулю ее определителя

$$\det\begin{vmatrix} n^2+\alpha^2 & \dfrac{1}{E_1 D_1} \\ \omega^2\rho h & n^2+\alpha^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\alpha_{1,2}{}^2 = -n^2 = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho h}{E_1 D_1}}\ . \qquad (35)$$

Собственные формы изгибных колебаний полосы постоянной толщины имеют вид

$$\bar{W}_n^{1,2} = \sin n x_2;\ \bar{M}^{\ 1,2} = \pm\omega\sqrt{\rho h E_1 D_1}\sin n x_2;$$

$$\varphi_n^{1,2} = n\cos n x_2;\ Q_n^{1,2} = \pm\omega\sqrt{\rho h E_1 D_1}\cos n x_2.$$

Построим решение задачи, сопряженной к (32)–(33):

$$\bar{W}^{*\prime} + \alpha^2\bar{\varphi}^* + \rho h\omega^2\bar{Q}^* = 0,\ \bar{\varphi}^{*\prime} + W^* = 0;$$

$$\bar{M}^{*\prime} + \frac{1}{E_1 D_1}\bar{\varphi}^* + \alpha^2\bar{Q}^* = 0,\ \bar{Q}^{*\prime} + \bar{M}^* = 0; \qquad (36)$$

и

$$\bar{\varphi}^* = 0,\ \bar{Q}^* = 0,\ x_2 = 0,\ \pi. \qquad (37)$$

Преобразуя (36), (37), получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\bar{\varphi}^{*\prime\prime} - \alpha^2\bar{\varphi}^* - ph\omega^2\bar{Q}^* = 0,\ \bar{Q}^{*\prime\prime} - \alpha^2\bar{Q}^* - \frac{1}{E_1 D_1}\bar{\varphi}^* = 0, \qquad (38)$$

со следующими граничными условиями при $x_2 = 0,\ \pi$: $\bar{\varphi}^* = 0,\ \bar{Q}^* = 0$.

Решение задачи (38) ищем в виде

$$\overline{\varphi}^{*}=\alpha_{\varphi}{}^{*}\sin n x_2,\ \overline{Q}^{*}=\alpha_{Q}{}^{*}\sin n x_2, \tag{39}$$

откуда $\alpha^2_{1,2}$ имеет тот же вид (35), а собственные формы колебаний имеют вид

$$\overline{\varphi}_n{}^{*1,2}=\pm\omega\sqrt{phE_1D_1}\sin nx_2,\ \overline{Q}_n{}^{*1,2}=\sin n x_2,$$

$$\overline{W}_n{}^{*1,2}=+n\omega\sqrt{phE_1D_1}\cos nx_2,\ \overline{M}_n^{*1,2}=n\cos x_2. \tag{40}$$

Для получения условий биортогональности решений прямой и сопряженной задач необходимо рассмотреть равенство (22).

Численные результаты

Численные решения спектральных задач проводились на ЭВМ программным комплексом, основанным на методе ортогональной прогонки С. К. Годунова [4] в сочетании с методом Мюллера. Результаты, полученные при тестировании программного комплекса, совпадают с полученными аналитическими решениями с точностью до 4–5 знака в диапазоне частот от 0,01 до 100. Здесь анализ проводится в безразмерных переменных, в которых плотность материала ρ, половина ширины волновода l_2 и $R_D(t)=A^{e^{-\beta t}t^{\alpha-1}}$. Мгновенный модуль упругости E принят равным единице. Анализ полученных данных показывает, что область применимости теории Кирхгоффа – Лява к пластине постоянной толщины ограничена диапазоном низких частот. Например, для первой моды ($h=0$) диапазон применения теории $0\le\omega\le 3$ что связано с неограниченным ростом фазовой скорости распространения с увеличением частоты. При этом для больших частот $C_f C_S\sim\sqrt{\omega}$. В области больших частот, когда длина волны моды сравнима или меньше толщины полосы, возникает, как известно, локализованная у граней полосы волна Релея.

Рассмотрим сначала волновод с линейным законом изменения толщины. На основе полученных результатов выявлено, что в отличие от полосы постоянного сечения в случае клиновидного волновода с малым углом в основании клина α существует конечный предел фазовой скорости распространения моды, причем

$$\lim_{\omega\to\infty}\tilde{C}_f=2C_S\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

где C_S – скорость волны сдвига, что совпадает с результатами других исследований [5] и др. Таким образом, показано, что теория Кирхгоффа – Лява позволяет получить волны, распространяющиеся в клиновидном волноводе с достаточно малым углом при основании клина, со скоростями, меньшими скорости волны сдвига и отличными от скорости волны Релея. Кроме того, эти волны, начиная с некоторой частоты, распространяются без дисперсии.

Список литературы

1. **Гахов, Ф. Д.** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Физматгиз, 1963. – 39 с.
2. **Каюмов, С. С.** Распространение и дифракция волн в диссипативно-неоднородных цилиндрических деформируемых механических системах / С. С. Каюмов, И. И. Сафаров. – Ташкент : Фан, 2004. – 250 с.

3. **Неймарк, М. А.** Линейные дифференциальные операторы / М. А. Неймарк. – М. : Наука, 1969. – 526 с.
4. **Марчук, Г. И.** Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1977. – 456 с.
5. **Гринченко, В. Т.** Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – Киев : Наукова думка, 1981. – 283 с.

Сафаров Исмоил Ибрагимович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Бухарский технологический институт пищевой и легкой промышленности, (Республика Узбекистан, г. Бухара)

Safarov Ismoil Ibragimovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher mathematics, Bukhara Technological Institute of Food and Light Industry (Republic of Uzbekistan, Bukhara)

E-mail: safarov54@mail.ru

Болтаев Зафар Ихтиярович
ассистент, кафедра высшей математики, Бухарский технологический институт пищевой и легкой промышленности (Республика Узбекистан, г. Бухара)

Boltaev Zafar Ikhtiyarovich
Assistant, sub-department of higher mathematics, Bukhara Technological Institute of Food and Light Industry (Republic of Uzbekistan, Bukhara)

E-mail: safarov54@mail.ru

УДК 539.3

Сафаров, И. И.

Распространение гармонических волн в пластинке переменной толщины / И. И. Сафаров, З. И. Болтаев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 4 (20). – С. 24–35.